POTENZE

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ volte}}$ $\quad a^0 = 1 \quad a^1 = a \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

Proprietà $a, b \in \Re - \{0\} \qquad m, n \in \mathfrak{N}$

$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad a^n : a^m = a^{n-m} \qquad (a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m \qquad (a : b)^m = a^m : b^m \qquad (a^n)^m = a^{n \cdot m}$

RADICALI

$a, b \in \Re^+ \qquad n, m, k \in \mathfrak{N}$

$\sqrt[n]{a} = b \Rightarrow b^n = a \qquad \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n/k]{a^{m/k}} \qquad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}\ ; \quad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[nm]{a^m b^n}$

$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}\ ; \quad \sqrt[n]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[nm]{a^m : b^n} \qquad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\ ; \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$ $\quad m$ e n primi tra loro

Formula del radicale doppio

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}} \qquad \sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} - \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

Razionalizzazioni

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b} \qquad \frac{m}{\sqrt{a+b}} = \frac{m\sqrt{a+b}}{a+b} \qquad \frac{m}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = m\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b} \qquad \frac{m}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = m\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$$

PRODOTTI NOTEVOLI

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \qquad (a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2 \qquad (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \qquad (a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

I coefficienti binomiali $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ si possono ottenere dal triangolo di Tartaglia:

	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	…
$(n = 0)$	1						
$(n = 1)$	1	1					
$(n = 2)$	1	2	1				
$(n = 3)$	1	3	3	1			
$(n = 4)$	1	4	6	4	1		
$(n = 5)$	1	5	10	10	5	1	

………………………………………………………………………………

Fattoriale di n (o n fattoriale)

$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

EQUAZIONI DI PRIMO E SECONDO GRADO ($a \neq 0$)

Primo grado

$ax + b = 0$

$x = -\frac{b}{a}$

Secondo grado

$ax^2 + bx + c = 0$

$x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a}$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ $\quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

VALORE ASSOLUTO

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

- $\sqrt{a^2} = |a|$
- $|a| = |-a|$
- $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \quad b \neq 0$
- $|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b \quad [b \geq 0]$
- $|a| \leq |b| \Leftrightarrow a^2 \leq b^2$
- $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
- $|a| = |b| \Leftrightarrow a = \pm b$
- $|a| \geq b \Leftrightarrow (a \leq -b)$ oppure $(a \geq b) \quad [b \geq 0]$
- $\big||a| - |b|\big| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$

SCOMPOSIZIONI

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ $\quad x^2 \pm 2xy + y^2 = (x \pm y)^2$ $\quad x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$ $\quad x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3 = (x \pm y)^3$ $\quad x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, con x_1 e x_2 zeri del trinomio dato.

LOGARITMI

$\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a \qquad (a \in \Re^+;\ b \in \Re^+ - [1];\ c \in \Re)$

$\log_{10}$ si indica per lo più con Log o lg

$\log_e$ si indica per lo più con ln o log

Proprietà $(b \in \Re^+ - \{1\};\ k, n, u, v \in \Re^+)$

$\log_b (u \cdot v) = \log_b u + \log_b v$

$\log_b \left(\frac{u}{v}\right) = \log_b u - \log_b v$

$\log_b u^n = n \log_b u \qquad \log_b \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n} \log_b u$

$\log_b \left(\frac{u}{v}\right) = -\log_b \left(\frac{v}{u}\right)$

$\log_b b = 1 \qquad \log_b 1 = 0 \qquad \log_b b^n = n \qquad b^{\log_b a} = a$

$\log_b u = \log_b k \cdot \log_k u = \frac{\log_k u}{\log_k b} \Rightarrow \log_b k \cdot \log_k b = 1$

$\text{colog}_b\, a = -\log_b a$

DISEQUAZIONI

Primo grado ($a \neq 0$)

$$ax + b > 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x > -\dfrac{b}{a} & \text{se } a > 0 \\ x < -\dfrac{b}{a} & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

$$ax + b < 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x < -\dfrac{b}{a} & \text{se } a > 0 \\ x > -\dfrac{b}{a} & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

Secondo grado

$a > 0$	$ax^2 + bx + c > 0$	$ax^2 + bx + c < 0$
$\Delta > 0$	$x < x_1,\; x > x_2$	$x_1 < x < x_2$
$\Delta = 0$	$\forall x \neq x_1 = x_2$	nessuna soluzione
$\Delta < 0$	$\forall x$	nessuna soluzione

Disequazioni prodotto di polinomi e disequazioni fratte

$$A(x) \cdot B(x) > 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{N(x)}{D(x)} > 0$$

La soluzione è costituita dagli intervalli nei quali $A(x)$ e $B(x)$ oppure $N(x)$ e $D(x)$ sono concordi.

$$A(x) \cdot B(x) < 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{N(x)}{D(x)} < 0$$

La soluzione è costituita dagli intervalli in cui $A(x)$ e $B(x)$ oppure $N(x)$ e $D(x)$ sono discordi.

Disequazioni irrazionali

Indice pari

$$\sqrt[2n]{f(x)} < g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < [g(x)]^{2n} \end{cases}$$

$$\sqrt[2n]{f(x)} > g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \bigcup \text{ (unione delle soluzioni dei due sistemi) } \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > [g(x)]^{2n} \end{cases}$$

Indice dispari

$\sqrt[2n+1]{f(x)} < g(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) < [g(x)]^{2n+1}$ $\qquad$ $\sqrt[2n+1]{f(x)} > g(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) > [g(x)]^{2n+1}$

Sistemi di disequazioni

$$\begin{cases} A_1(x) > B_1(x) \\ A_2(x) > B_2(x) \\ \quad\vdots \\ A_n(x) > B_n(x) \end{cases}$$

La soluzione del sistema è l'intersezione degli insiemi delle soluzioni delle singole disequazioni che costituiscono il sistema.

TRIGONOMETRIA

$\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\overline{PQ}}{\overline{OA}} = \dfrac{\overline{PQ}}{r}$ $\qquad$ $(\operatorname{sen}\alpha = \overline{PQ}$ se $\overline{OA} = r = 1)$

$\cos\alpha = \dfrac{\overline{OQ}}{\overline{OA}} = \dfrac{\overline{OQ}}{r}$ $\qquad$ $(\cos\alpha = \overline{OQ}$ se $\overline{OA} = r = 1)$

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\overline{RA}}{\overline{OA}} = \dfrac{\overline{RA}}{r}$ $\qquad$ $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$

$\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{\overline{BS}}{\overline{OA}} = \dfrac{\overline{BS}}{r}$ $\qquad$ $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$

$\text{angolo in radianti} = \dfrac{\text{angolo in gradi}}{180°}\pi$ $\qquad$ $\text{angolo in gradi} = \dfrac{\text{angolo in radianti}}{\pi}180°$

Relazioni fondamentali della goniometria e funzioni trigonometriche di archi particolari

$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $\qquad$ $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \quad \left(\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$

Angoli		SENO	COSENO	TANGENTE	COTANGENTE	Angoli	
gradi	radianti					gradi	radianti
0°	0	0	1	0	non esiste (±∞)	90°	π/2
9°	$\frac{\pi}{20}$	$\frac{\sqrt{3+\sqrt5}-\sqrt{5-\sqrt5}}{2}$	$\frac{\sqrt{3+\sqrt5}+\sqrt{5-\sqrt5}}{4}$	$\frac{4-\sqrt{10+2\sqrt5}}{\sqrt5-1}$	$\frac{\sqrt5-1}{4-\sqrt{10+2\sqrt5}}$	81°	$\frac{9}{20}\pi$
15°	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}$	$\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}$	$2-\sqrt3$	$2+\sqrt3$	75°	$\frac{5}{12}\pi$
18°	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\sqrt5-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt5}}{4}$	$\frac{\sqrt{25-10\sqrt5}}{5}$	$\sqrt{5+2\sqrt5}$	72°	$\frac{2}{5}\pi$
22°30′	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt2}}{2}$	$\sqrt2-1$	$\sqrt2+1$	67°30′	$\frac{3}{8}\pi$
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt3}{2}$	$\frac{\sqrt3}{3}$	$\sqrt3$	60°	$\frac{\pi}{3}$
36°	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt5}}{4}$	$\frac{\sqrt5+1}{4}$	$\sqrt{5-2\sqrt5}$	$\frac{\sqrt{25+10\sqrt5}}{5}$	54°	$\frac{2}{10}\pi$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt2}{2}$	$\frac{\sqrt2}{2}$	1	1	45°	$\frac{\pi}{4}$
90°	π/2	1	0	non esiste (±∞)	0	360°	2 π
180°	π	0	–1	0	non esiste (±∞)	270°	$\frac{3}{2}\pi$
gradi	radianti	COSENO	SENO	COTANGENTE	TANGENTE	gradi	radianti
Angoli						Angoli	

Relazioni tra le funzioni circolari di un arco

	sen α	cos α	tg α	cotg α
sen α	sen α	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\pm\frac{\text{tg}\,\alpha}{\sqrt{1+\text{tg}^2\alpha}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\text{cotg}^2\alpha}}$
cos α	$\pm\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}$	cos α	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\text{tg}^2\alpha}}$	$\pm\frac{\text{cotg}\,\alpha}{\sqrt{1+\text{cotg}^2\alpha}}$
tg α	$\pm\frac{\text{sen}\,\alpha}{\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}}$	$\pm\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	tg α	$\frac{1}{\text{cotg}\,\alpha}$
cotg α	$\pm\frac{\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}}{\text{sen}\,\alpha}$	$\pm\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\frac{1}{\text{tg}\,\alpha}$	cotg α

Relazioni tra le funzioni di archi associati

angolo funzione	90° – α	90° + α	180° – α	180° + α	270° – α	270° + α	360° – α (– α)
seno	cos α	cos α	sen α	– sen α	– cos α	– cos α	– sen α
coseno	sen α	– sen α	– cos α	– cos α	– sen α	sen α	cos α
tangente	cotg α	– cotg α	– tg α	tg α	cotg α	– cotg α	– tg α
cotangente	tg α	– tg α	– cotg α	cotg α	tg α	– tg α	– cotg α

Funzioni goniometriche inverse

La funzione $y = \text{sen}\, x$ è invertibile in $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$

La funzione $y = \operatorname{tg} x$ è invertibile in $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

La funzione $y = \operatorname{cotg} x$ è invertibile in $(0; \pi)$

Funzioni iperboliche

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

FORMULE TRIGONOMETRICHE

Formule di addizione e sottrazione

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \operatorname{sen}\beta \qquad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} \qquad \operatorname{cotg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{cotg}\alpha \operatorname{cotg}\beta \mp 1}{\operatorname{cotg}\beta \pm \operatorname{cotg}\alpha}$$

Formule di duplicazione

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = \begin{cases} 2\cos^2\alpha - 1 \\ 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} \qquad \operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{\operatorname{cotg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{cotg}\alpha}$$

Formule di triplicazione

$$\operatorname{sen} 3\alpha = 3\operatorname{sen}\alpha - 4\operatorname{sen}^3\alpha \qquad \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha} \qquad \operatorname{cotg} 3\alpha = \frac{\operatorname{cotg}^3 \alpha - 3 \operatorname{cotg}\alpha}{3 \operatorname{cotg}^2 \alpha - 1}$$

Formule di bisezione

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \pm\frac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha} = \pm\frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} \qquad \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \pm\frac{\operatorname{sen}\alpha}{1-\cos\alpha} = \pm\frac{1+\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$$

Formule parametriche

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{2t}{1-t^2} \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1-t^2}{2t}$$

identità valide per $\alpha \neq (2k+1)\pi$ e con $t = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$

Formule di prostaferesi

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \cos\alpha - \cos\beta = -2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{sen}(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\ \cos\beta} \qquad \operatorname{cotg}\alpha \pm \operatorname{cotg}\beta = \frac{\operatorname{sen}(\beta\pm\alpha)}{\operatorname{sen}\alpha\ \operatorname{sen}\beta}$$

Formule di Werner

$$\operatorname{sen}\alpha\ \operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)] \qquad \cos\alpha\ \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$$

$$\operatorname{sen}\alpha\ \cos\beta = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta)]$$

$$\operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta} \qquad \operatorname{cotg}\alpha\ \operatorname{cotg}\beta = \frac{\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}$$

TRIANGOLI

Triangoli rettangoli

$$\beta + \gamma = \frac{\pi}{2} = \alpha$$

$b = a \operatorname{sen}\beta = a \cos\gamma = c \operatorname{tg}\beta = c \operatorname{cotg}\gamma$

$c = a \operatorname{sen}\gamma = a \cos\beta = b \operatorname{tg}\gamma = b \operatorname{cotg}\beta$

Triangoli qualunque

Teorema dei seni

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = 2R$$

Teorema della corda

$a = 2R \operatorname{sen} \alpha \qquad b = 2R \operatorname{sen} \beta \qquad c = 2R \operatorname{sen} \gamma$

ove R è il raggio della circonferenza circoscritta.

Teorema di Carnot (o del coseno, o di Pitagora generalizzato)

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \qquad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \qquad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$

Teoremi delle proiezioni

$a = b \cos \gamma + c \cos \beta \qquad b = a \cos \gamma + c \cos \alpha \qquad c = b \cos \alpha + a \cos \beta$

Teorema di Nepero (o delle tangenti)

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}} \Rightarrow \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{a-b}{a+b}\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} \qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}$$

ed analogamente

$$\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{b-c}{b+c}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} \qquad \operatorname{tg}\frac{\gamma-\alpha}{2} = \frac{c-a}{c+a}\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}$$

Formule di Briggs

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

$$\operatorname{sen}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}} \qquad \cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}} \qquad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

$$\operatorname{sen}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} \qquad \cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}} \qquad \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

APPLICAZIONI DELLA TRIGONOMETRIA ALLA GEOMETRIA

- Area S di un triangolo, note le misure di due lati e dell'angolo tra essi compreso

$$S = \frac{1}{2}ab \operatorname{sen}\gamma = \frac{1}{2}bc \operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2}ac \operatorname{sen}\beta$$

- Area S di un triangolo, note le misure di un lato e degli angoli

$$S = a^2\frac{\operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\gamma}{2\operatorname{sen}\alpha} = b^2\frac{\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\gamma}{2\operatorname{sen}\beta} = c^2\frac{\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta}{2\operatorname{sen}\gamma}$$

- Area S di un triangolo, note le misure dei tre lati e degli angoli (formula di Erone)

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad p = \text{semiperimetro} = \frac{a+b+c}{2}$$

- Raggio r della circonferenza inscritta in un triangolo

$$r = \frac{S}{p} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} = (p-a)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = (p-b)\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = (p-c)\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$$

- Raggio R della circonferenza circoscritta ad un triangolo

$$R=\frac{abc}{4S}=\frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}=\frac{a}{2\,\text{sen}\,\alpha}=\frac{b}{2\,\text{sen}\,\beta}=\frac{c}{2\,\text{sen}\,\gamma}$$

- Altezze h_a, h_b e h_c di un triangolo, note le misure dei lati

$$h_a=\frac{2S}{a}=\frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}=\frac{bc}{a}\text{sen}\,\alpha=\frac{a\,\text{sen}\,\beta\,\text{sen}\,\gamma}{\text{sen}\,\alpha}$$

$$h_b=\frac{2S}{b}=\frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{b}=\frac{ac}{b}\text{sen}\,\beta=\frac{b\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\gamma}{\text{sen}\,\beta}$$

$$h_c=\frac{2S}{c}=\frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{c}=\frac{ab}{c}\text{sen}\,\gamma=\frac{c\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta}{\text{sen}\,\gamma}$$

- Mediane m_a, m_b e m_c di un triangolo, note le misure dei lati

$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2} \qquad m_b=\frac{1}{2}\sqrt{2c^2+2a^2-b^2} \qquad m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}$$

- Bisettrici b_α, b_β e b_γ di un triangolo, note le misure dei lati

$$b_\alpha=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)} \qquad b_\beta=\frac{2ca}{c+a}\cos\frac{\beta}{2}=\frac{2}{c+a}\sqrt{cap(p-b)}$$

$$b_\gamma=\frac{2ab}{a+b}\cos\frac{\gamma}{2}=\frac{2}{a+b}\sqrt{abp(p-c)}$$

- Area S di un quadrilatero, note le sue diagonali ed uno degli angoli da esse formati

$$S=\frac{1}{2}dd'\,\text{sen}\,\alpha$$

- Area S di un quadrilatero circoscrittibile ad una circonferenza, in funzione dei lati (formula di Brahmagupta)

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \qquad p=\frac{a+b+c+d}{2}=\text{semiperimetro}$$

- Raggio R della circonferenza circoscritta al quadrilatero in funzione dei suoi lati

$$R=\frac{\sqrt{(ac+bd)(ab+cd)(ad+bc)}}{4\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}$$

NUMERI COMPLESSI $\left[j=\sqrt{-1} \;\rightarrow\; j^2=-1\right]$

- Forma algebrica → $z = a + j\,b$
- Forma trigonometrica-esponenziale → $z = M\,(\cos\theta + j\,\text{sen}\,\theta) = M\exp(j\theta)$

$$M = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \theta = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a} & \text{se } a > 0 \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a} & \text{se } a < 0 \\ \dfrac{\pi}{2}\operatorname{sgn} b & \text{se } a = 0 \end{cases}$$

$z_1 = a_1 + j\, b_1 = M_1 \exp(j\theta_1) \quad z_2 = a_2 + j\, b_2 = M_2 \exp(j\theta_2)$

Somma $\quad z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + j\,(b_1 + b_2)$

Differenza $\quad z_1 - z_2 = a_1 - a_2 + j\,(b_1 - b_2)$

Prodotto $\quad z_1\, z_1 = M_1\, M_2\, [\cos\,(\theta_1 + \theta_2) + j \text{ sen }(\theta_1 + \theta_2)] = M_1\, M_2 \exp[j(\theta_1 + \theta_2)]$

Quoziente $\quad \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{M_1}{M_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + j\,\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)] = \dfrac{M_1}{M_2}\exp[j(\theta_1 - \theta_2)]$

Potenza $\quad z^\alpha = M^\alpha\, [\cos\,(\alpha\theta) + j \text{ sen }(\alpha\theta)] = M^\alpha \exp(j\alpha\theta) \qquad \alpha \in \Re$

Radice $\quad \sqrt[N]{z} = \sqrt[N]{M}\left[\cos\left(\dfrac{\theta + 2\pi k}{N}\right) + j\,\text{sen}\left(\dfrac{\theta + 2\pi k}{N}\right)\right] = \sqrt[N]{M}\exp\left(j\dfrac{\theta + 2\pi k}{N}\right)$

$k = 0, 1, \ldots, N-1 \quad N \in \mathfrak{N}$

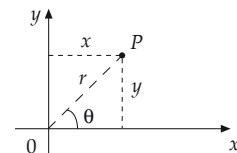
GEOMETRIA ANALITICA

- Relazione tra le coordinate cartesiane e le coordinate polari di un punto

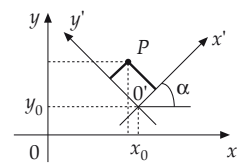
  x = ascissa; y = ordinata;

r = raggio vettore; θ = anomalia

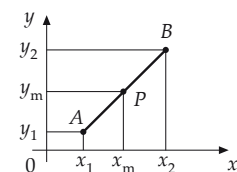
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \theta = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} & \text{se } x > 0 \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(y) & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Generico punto del piano

- Formule di rototraslazione

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\,\text{sen}\,\alpha + x_0 \\ y = x'\,\text{sen}\,\alpha + y'\cos\alpha + y_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = (x - x_0)\cos\alpha + (y - y_0)\,\text{sen}\,\alpha \\ y' = -(x - x_0)\,\text{sen}\,\alpha + (y - y_0)\cos\alpha \end{cases}$$

Rototraslazione di assi

- Coordinate del punto $P(x; y)$ che divide il segmento di estremi $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ in due parti proporzionali a due numeri assegnati m e n

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{m}{n} \qquad x = \frac{nx_1 + mx_2}{n + m} \qquad y = \frac{ny_1 + my_2}{n + m}$$

Punto medio

- Coordinate del punto medio $M\,(x_m; y_m)$ del segmento di estremi A e B

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

- Coordinate del baricentro G $(x_0; y_0)$ di un triangolo di vertici A $(x_1; y_1)$, B $(x_2; y_2)$ e C $(x_3; y_3)$

  $x_0 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$ $\qquad$ $y_0 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$

- Distanza tra due punti A e B

  $\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

RETTA

- Equazione implicita $ax + by + c = 0$
- Equazione esplicita $y = mx + q$ con $\begin{cases} m = \text{tg}\,\alpha & \text{coefficiente angolare} \\ q = & \text{ordinata all'origine} \end{cases}$
- Equazione segmentaria $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$
- Retta passante per due punti A $(x_1; y_1)$, B $(x_2; y_2)$ $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$

  Coefficiente angolare $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

- Equazioni di rette particolari (h e k costanti)

  Asse delle ascisse $y = 0$
  Asse delle ordinate $x = 0$

  Parallele all'asse x $y = k$
  Parallele all'asse y $x = h$
  Bisettrice del I e III quadrante $y = x$
  Bisettrice del II e IV quadrante $y = -x$

- Angolo α tra due rette di equazioni $y = mx + q$ e $y = m'x + q'$

  $\text{tg}\,\alpha = \frac{m - m'}{1 + mm'}$

  Condizione di parallelismo $m = m'$

  Condizione di perpendicolarità $m \cdot m' = -1$ ossia $m' = -\frac{1}{m}$

- Fascio proprio di rette con centro C $(x_0; y_0)$

  $y - y_0 = m(x - x_0)$ [non contiene la retta $x = x_0$]

- Fascio improprio di rette parallele ad una retta assegnata

  $y = mx + k$ (ove k è un parametro variabile, m è il coefficiente angolare della retta assegnata)

- Distanza d del punto P (x_0, y_0) della retta di equazione $ax + by + c = 0$

  $d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

- Equazione della bisettrice degli angoli formati dalle rette $ax + by + c = 0$ e $a_1x + b_1y + c_1 = 0$

  $\frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \pm \frac{|a_1x + b_1y + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}$

- Area del triangolo in funzione dei tre vertici $A\ (x_1;\ y_1)$, $B\ (x_2;\ y_2)$ e $C\ (x_3;\ y_3)$

$$S = \mp\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_3 - x_1 & x_2 - x_1 \\ y_3 - y_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix}$$

CONICHE

- L'equazione generale di una conica è

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

in cui le quantità a, b, c, d, e, f possono assumere qualunque valore reale, purché a, b, c non siano contemporaneamente nulle, dato che, in tal caso, l'equazione si ridurrebbe ad un'equazione di primo grado.

- Se accade che

$$\begin{vmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{vmatrix} = 0,$$

la conica è detta *degenere*, essendo costituita da una coppia di rette reali, distinte o coincidenti, oppure da una coppia di rette immaginarie.

- Posto $\Delta = b^2 - 4ac$, se accade che

$\Delta < 0$, la conica è di *genere ellittico*, cioè si tratta di un'ellisse reale o di un'ellisse immaginaria o di due rette immaginarie che si incontrano in un punto reale;

$\Delta > 0$, la conica è di *genere iperbolico*, cioè si tratta di un'iperbole reale o di due rette reali incidenti;

$\Delta = 0$, la conica è di *genere parabolico*, cioè si tratta di una parabola reale o di due rette parallele, reali oppure immaginarie, coincidenti o distinte.

- Le coordinate del centro x_c e y_c di una conica possono essere determinate risolvendo il sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} ax_c + \dfrac{b}{2}y_c = -\dfrac{d}{2}, \\ \dfrac{b}{2}x_c + cy_c = +\dfrac{e}{2}. \end{cases}$$

Nel caso della parabola, essendo $\Delta = 0$, questo sistema non possiede un'unica soluzione.

PARABOLA

- Parabola con asse parallelo all'asse $y \rightarrow y = ax^2 + bx + c$

Vertice $V\left(-\dfrac{b}{2a};\ -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$

Fuoco $F\left(-\dfrac{b}{2a};\ \dfrac{1-\Delta}{4a}\right)$

Direttrice $y = -\dfrac{1+\Delta}{4a}$ essendo $\Delta = b^2 - 4ac$

Asse $x = -\dfrac{b}{2a}$

Se $a > 0$, la parabola volge la concavità verso l'alto.

Se $a < 0$, la parabola volge la concavità verso il basso.

Equazione della retta tangente alla parabola in un suo punto $P\ (x_0;\ y_0)$

$$\frac{y+y_0}{2}=ax_0x+b\frac{x+x_0}{2}+c$$

- Parabola con asse parallelo all'asse $x \rightarrow x = ay^2 + by + c$

Vertice $V\left(-\frac{\Delta}{4a};\ -\frac{b}{2a}\right)$ Fuoco $F\left(\frac{1-\Delta}{4a};\ -\frac{b}{2a}\right)$

Direttrice $x=-\frac{1+\Delta}{4a}$ essendo $\Delta = b^2 - 4ac$ Asse $y=-\frac{b}{2a}$

Se $a > 0$, la parabola volge la concavità verso destra.
Se $a < 0$, la parabola volge la concavità verso sinistra.

Equazione della retta tangente alla parabola in un suo punto $P\ (x_0;\ y_0)$

$$\frac{x+x_0}{2}=ay_0y+b\frac{y+y_0}{2}+c$$

CIRCONFERENZA

Circonferenza di centro $C\ (\alpha;\ \beta)$ e raggio $r \rightarrow (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$

oppure (forma canonica) $\rightarrow x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

Relazioni tra le coordinate del centro, il raggio ed i coefficienti dell'equazione in forma canonica

$$\begin{cases} a = -2\alpha \\ b = -2\beta \\ c = \alpha^2 + \beta^2 - r^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = -\dfrac{a}{2} \\ \beta = -\dfrac{b}{2} \\ r = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} \end{cases}$$

Equazione della retta tangente alla circonferenza in un suo punto $P\ (x_0; y_0)$

$$x_0 x + y_0 y + a\frac{x + x_0}{2} + b\frac{y + y_0}{2} + c = 0$$

Area del cerchio: πr^2.

ELLISSE

- Equazione dell'ellisse di fuochi $F_1\ (-c; 0)$ e $F_2\ (c; 0)$

  $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{con} \quad c^2 = a^2 - b^2$$

  $2a$ e $2b$ assi dell'ellisse, $2c$ distanza focale, $e = \dfrac{c}{a} < 1$ eccentricità.

- Equazione dell'ellisse di fuochi $F_1\ (0; -c)$ e $F_2\ (0; c)$

  $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{con} \quad c^2 = b^2 - a^2$$

  $2a$ e $2b$ assi dell'ellisse, $2c$ distanza focale, $e = \dfrac{c}{b} < 1$ eccentricità.

  Equazione della retta tangente ad un'ellisse in un punto $P\ (x_0; y_0)$

  $$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

IPERBOLE

- Equazione dell'iperbole di fuochi F_1 $(-c; 0)$ e F_2 $(c; 0)$

  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ con $b^2 = c^2 - a^2$

  Asintoti: $y = -\frac{b}{a}x \quad y = \frac{b}{a}x$

  $2a$ asse trasverso, $2b$ asse non trasverso, $2c$ distanza focale, $e = \frac{c}{a} > 1$ eccentricità.

  Equazione della retta tangente all'iperbole in un suo punto P $(x_0; y_0)$

  $\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$

- Equazione dell'iperbole di fuochi F_1 $(0; -c)$ e F_2 $(0; c)$

  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ con $a^2 = c^2 - b^2$

  Asintoti: $y = -\frac{b}{a}x \quad y = \frac{b}{a}x$

  $2a$ asse non trasverso, $2b$ asse trasverso, $2c$ distanza focale, $e = \frac{c}{b} > 1$ eccentricità.

  Equazione della retta tangente all'iperbole in un suo punto P $(x_0; y_0)$

  $\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = -1$

- Iperbole equilatera $a = b$

  $x^2 - y^2 = a^2 \qquad x^2 - y^2 = -a^2$

  $F(\pm a\sqrt{2}; 0) \qquad F(0; \pm a\sqrt{2})$

  Asintoti: $y = -x \qquad y = x$

  eccentricità: $e = \sqrt{2}$

- Iperbole equilatera riferita ai propri asintoti

  $xy = k$

- Iperbole equilatera traslata e riferita ai propri asintoti

  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ (funzione omografica con $c \neq 0$ e $ad \neq bc$)

  Centro della traslazione $C\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$ Formule di traslazione: $x = X - \frac{d}{c} \quad y = Y + \frac{a}{c}$

SUCCESSIONI $\{a_n\}$

Aritmetiche

$$d = a_{n+1} - a_n$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot d$$

Geometriche

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$S_n = \begin{cases} n\,a_1 & \text{se } q = 1 \\ a_1 \dfrac{1-q^n}{1-q} & \text{se } q \neq 1 \end{cases}$$

OPERAZIONI SUI LIMITI

Se $\lim\limits_{x \to c} f(x) = l_1$ e $\lim\limits_{x \to c} g(x) = l_2$, con l_1 e l_2 finiti, allora:

Addizione $\lim\limits_{x \to c} \left[f(x) + g(x) \right] = l_1 + l_2$;

Sottrazione $\lim\limits_{x \to c} \left[f(x) - g(x) \right] = l_1 - l_2$;

Moltiplicazione $\lim\limits_{x \to c} \left[f(x) \cdot g(x) \right] = l_1 \cdot l_2$;

Divisione $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l_1}{l_2}$ $(l_2 \neq 0)$.

Valore assoluto

Se $\lim\limits_{x \to c} f(x) = l$, allora $\lim\limits_{x \to c} \left| f(x) \right| = \left| l \right|$.

Reciproco

$$\lim_{x \to c} f(x) = \begin{cases} l \neq 0 & \Rightarrow \quad \lim\limits_{x \to c} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{l} \\ 0 & \Rightarrow \quad \lim\limits_{x \to c} \dfrac{1}{f(x)} = \infty \\ \infty & \Rightarrow \quad \lim\limits_{x \to c} \dfrac{1}{f(x)} = 0 \end{cases}$$

Forme indeterminate espresse in modo simbolico:

$\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\dfrac{0}{0}$, 0^0, ∞^0, 1^∞.

LIMITI NOTEVOLI

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \ldots + b_n} = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0} & \text{se } m = n \\ \infty & \text{se } m > n \\ 0 & \text{se } m < n \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} ax}{x} = a \qquad \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e \qquad \lim_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^x = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{k}{x} \right)^x = e^k \ (k \in \Re) \qquad \lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x = 0 \quad \text{se} \quad \alpha > 0 \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^n - 1}{e^x} = 0 \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

$$\lim_{x\to \infty} \sqrt[x]{a} = 1 \qquad \lim_{x\to +\infty} \sqrt[x]{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\text{tg}\, x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty \quad \text{se} \quad a > 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

FUNZIONI CONTINUE E PUNTI DI DISCONTINUITÀ

Una funzione $f(x)$ si dice continua nel punto c, se $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

Se una funzione $f(x)$ non è continua in un punto c, si dice *ivi discontinua*. La discontinuità può essere di tre specie.

1ª specie, se in tale punto esistono finiti i limiti destro e sinistro e sono diversi tra loro.

La differenza: $\left|\lim_{x\to c^+} f(x) - \lim_{x\to c^-} f(x)\right|$ si chiama salto della $f(x)$ in c.

Ad esempio, la funzione $f(x) = \frac{x}{|x|} = \text{sgn}\, x$ è discontinua nel punto $x = 0$ con salto uguale a 2.
Un altro esempio di discontinuità di 1ª specie è mostrato in figura.

2ª specie, se in tale punto uno almeno dei due limiti $\lim_{x\to c^-} f(x)$ e $\lim_{x\to c^+} f(x)$, è infinito, oppure non esiste.

Ad esempio, sono discontinue di 2ª specie nel punto $x = 0$ le funzioni $y = \frac{1}{x}$, perché in tale punto $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ e $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ e la funzione $y = \text{sen}\frac{1}{x}$, perché nel punto $x = 0$ non esiste né il limite destro, né il limite sinistro; altro esempo di discontinuità di 2ª specie è mostrato in figura.

3ª specie, se in tale punto esiste il limite $\lim_{x\to c} f(x)$, ma il valore di $f(x)$ o non esiste in c, oppure esiste ma risulta $f(c) \neq \lim_{x\to c} f(x)$.

Tale discontinuità è detta "eliminabile", perché si può stabilire di porre $f(c) = \lim_{x\to c} f(x)$ se la funzione in c non esiste, oppure di cambiare il valore di $f(x)$ per $x = c$, ponendo $f(c) = \lim_{x\to c} f(x)$ se $f(c) \neq \lim_{x\to c} f(x)$. Si ottiene in tal modo una nuova funzione, detta prolungamento per continuità di $f(x)$ nel punto c, che non è più discontinua per $x = c$.

Un esempio di discontinuità di 3ª specie è mostrato in figura.

Esempio: la funzione $f(x) = \text{sen}\, x/x$, ha nel punto $x = 0$ una discontinuità di 3ª specie perché in $x = 0$ esiste finito il limite, ma non esiste il valore della funzione. Tale funzione si può prolungare nel punto $x = 0$ in $f^*(x)$ ponendo

$$f^*(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen}\, x}{x}, & \forall x \neq 0, \\ 1, & \text{per } x = 0\,. \end{cases}$$

DERIVATE

Definizione

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \text{tg}\, \omega$$

- Equazione della retta tangente alla curva di equazione $y = f(x)$ in $P\,(x_0; f(x_0))$

  $$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

- Equazione della retta normale alla curva di equazione $y = f(x)$ in $P\,(x_0; f(x_0))$

  $$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$$

Regole di derivazione

Funzione	Derivata
$F(x) = f(x) + g(x)$	$F'(x) = f'(x) + g'(x)$
$F(x) = f(x) - g(x)$	$F'(x) = f'(x) - g'(x)$
$F(x) = f(x) \cdot g(x)$	$F'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x)\ \ g'(x)$
$F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$F'(x) = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$
$F(x) = f[g(x)]$	$F'(x) = f'[g(x)] \cdot g'(x)$
$F(x) = [f(x)]^n$	$F'(x) = n \cdot [f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$
$F(x) = [h(x)]^{g(x)}$	$F'(x) = [h(x)]^{g(x)} \left[g'(x) \cdot \ln h(x) + \dfrac{g(x) \cdot h'(x)}{h(x)} \right]$

Derivate delle principali funzioni

Funzione $f(x)$	Derivata $f'(x)$
k	0
x	1
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sqrt[n]{x^m}$	$\dfrac{m}{n} \sqrt[n]{x^{m-n}}$
$\text{sen}\, x$	$\cos x$
$\cos x$	$- \text{sen}\, x$

$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
$\operatorname{cotg} x$	$-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -(1 + \operatorname{cotg}^2 x)$
$\operatorname{arcsen} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arccotg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
a^x	$a^x \cdot \ln a = \frac{a^x}{\log_a e}$
e^x	e^x
$\log_b x$	$\frac{1}{x} \log_b e$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\operatorname{sen} f(x)$	$\cos f(x) \cdot f'(x)$
$\cos f(x)$	$-\operatorname{sen} f(x) \cdot f'(x)$
$\operatorname{tg} f(x)$	$\frac{1}{\cos^2 f(x)} \cdot f'(x)$

$\operatorname{cotg} f(x)$	$-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 f(x)} \cdot f'(x)$
$\log \lvert f(x) \rvert$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$
$\log_a \lvert f(x) \rvert$	$\frac{f'(x)}{f(x)} \cdot \log a$
$e^{f(x)}$	$e^{f(x)} \cdot f'(x)$
$a^{f(x)}$	$a^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \ln a$
$\operatorname{arcsen} f(x)$	$\frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$
$\arccos f(x)$	$-\frac{f'(x)}{\sqrt{1+[f(x)]^2}}$
$\operatorname{arctg} f(x)$	$\frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$
$\operatorname{arccotg} f(x)$	$-\frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$
$\operatorname{senh} x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\operatorname{senh} x$
$\operatorname{tgh} x$	$1 - \operatorname{tgh}^2 x$
$\operatorname{cotgh} x$	$1 - \operatorname{cotgh}^2 x$

Teoremi di de l'Hôpital

$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, che vale se $f(x)$ e $g(x)$ sono derivabili intorno a c e se $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\infty}{\infty}$, ed esiste il $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

INTEGRALI

Si chiama *primitiva di una funzione* $f(x)$ ogni funzione $F(x)$ che abbia per derivata $f(x)$.
Se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$ allora $F(x) + c$, con c costante arbitraria, è la primitiva più generale e prende il nome di *integrale indefinito* di $f(x)$ e si rappresenta con il simbolo $\int f(x)dx$

- Regole di integrazione

$$\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx\,; \qquad \int [f(x)\pm g(x)]dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx\,,$$

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx \qquad \text{(integrazione per parti),}$$

$$\int f(x)\,dx = \int f[g(t)]\,g'(t)\,dt \qquad \text{(integrazione per sostituzione),}$$

in cui si è posto $x = g(t)$ e, quindi, $dx = g'(t)\,dt$.

- Integrali notevoli

$$\int k\,dx = kx + c \qquad \int x^N\,dx = \frac{x^{N+1}}{N+1} + c \quad (N \neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c \qquad \int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + c$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)^2} = -\frac{1}{x-a} + c \qquad \int \frac{dx}{(x-a)^N} = -\frac{1}{N-1}\frac{1}{(x-a)^{N-1}} + c \quad (N \neq 1)$$

$$\int e^x\,dx = e^x + c \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad (a > 0 \text{ e } a \neq 1)$$

$$\int x\,e^{ax}\,dx = \frac{ax-1}{a^2}e^{ax} + c \qquad \int x^2 e^{ax}\,dx = \frac{(ax)^2 - 2ax + 2}{a^3}e^{ax} + c$$

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - x + c \qquad \int x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + c$$

$$\int x^N \ln x\,dx = x^{N+1}\left[\frac{\ln x}{N+1} - \frac{1}{(N+1)^2}\right] + c \quad (N \neq -1) \qquad \int \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + c$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c \qquad \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a^2}\right| + c \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\operatorname{arcsen}\frac{x}{a} + c = -\frac{1}{a}\arccos\frac{x}{a} + c$$

$$\int \operatorname{sen}(ax)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax) + c \qquad \int \cos(ax)\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{sen}(ax) + c$$

$$\int x\,\text{sen}(ax)\,dx = \frac{\text{sen}(ax) - ax\cos(ax)}{a^2} + c \qquad \int x\cos(ax)\,dx = \frac{\cos(ax) + ax\,\text{sen}(ax)}{a^2} + c$$

$$\int \text{sen}(ax)\,\text{sen}(bx)\,dx = \frac{\text{sen}[(a-b)x]}{2(a-b)} - \frac{\text{sen}[(a+b)x]}{2(a+b)} + c \quad [a^2 \neq b^2]$$

$$\int \cos(ax)\cos(bx)\,dx = \frac{\text{sen}[(a-b)x]}{2(a-b)} + \frac{\text{sen}[(a+b)x]}{2(a+b)} + c \quad [a^2 \neq b^2]$$

$$\int \text{sen}(ax)\cos(bx)\,dx = \frac{\cos[(a-b)x]}{2(a-b)} - \frac{\cos[(a+b)x]}{2(a+b)} + c \quad [a^2 \neq b^2]$$

$$\int \text{sen}^2(ax)\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\text{sen}(2ax)}{4a} + c \qquad \int \cos^2(ax)\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\text{sen}(2ax)}{4a} + c$$

$$\int \text{tg}^2(ax)\,dx = -x + \frac{1}{a}\text{tg}(ax) + c \qquad \int \text{cotg}^2(ax)\,dx = -x - \frac{1}{a}\text{cotg}(ax) + c$$

$$\int x^2\,\text{sen}(ax)\,dx = \frac{2x}{a^2}\text{sen}(ax) - \frac{a^2x^2 - 2}{a^3}\cos(ax) + c$$

$$\int x^2\cos(ax)\,dx = \frac{2x}{a^2}\cos(ax) - \frac{a^2x^2 - 2}{a^3}\text{sen}(ax) + c$$

$$\int \frac{dx}{\cos(ax)} = \frac{1}{a}\ln\left|\text{tg}\left(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + c \qquad \int \frac{dx}{\text{sen}(ax)} = \frac{1}{a}\ln\left|\text{tg}\left(\frac{ax}{2}\right)\right| + c$$

$$\int \frac{dx}{A + B\,\text{sen}\,x + C\cos x} = c + \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{A^2 - B^2 - C^2}}\,\text{arctg}\,\dfrac{(A-B)\,\text{tg}\frac{x}{2} + C}{\sqrt{A^2 - B^2 - C^2}} & \text{se } A^2 > B^2 + C^2 \\ \dfrac{1}{\sqrt{B^2 + C^2 - A^2}}\ln\dfrac{(A-B)\,\text{tg}\frac{x}{2} + C - \sqrt{B^2 + C^2 - A^2}}{(A-B)\,\text{tg}\frac{x}{2} + C + \sqrt{B^2 + C^2 - A^2}} & \text{se } A^2 < B^2 + C^2 \\ \dfrac{1}{C}\ln\left(A + C\,\text{tg}\dfrac{x}{2}\right) & \text{se } A = B \\ -\dfrac{2}{C + (A-B)\,\text{tg}\frac{x}{2}} & \text{se } A^2 = B^2 + C^2 \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2(ax)} = \frac{1}{a}\text{tg}(ax) + c \qquad \int \frac{dx}{\text{sen}^2(ax)} = -\frac{1}{a}\text{cotg}(ax) + c$$

$$\int e^{ax}\,\text{sen}(bx)\,dx = \frac{a\,\text{sen}(bx) - b\cos(bx)}{a^2 + b^2}\,e^{ax} + c$$

$$\int e^{ax}\cos(bx)\,dx = \frac{a\cos(bx) + b\,\text{sen}(bx)}{a^2 + b^2}\,e^{ax} + c$$

$$\int e^{ax}\,\text{sen}^2(bx)\,dx = \frac{[a\,\text{sen}(bx) - 2b\cos(bx)]\,\text{sen}(bx) + \frac{2b^2}{a}}{a^2 + 4b^2}\,e^{ax} + c$$

$$\int e^{ax}\cos^2(bx)\,dx = \frac{[a\cos(bx) - 2b\,\text{sen}(bx)]\,\text{sen}(bx) + \frac{2b^2}{a}}{a^2 + 4b^2}\,e^{ax} + c$$

$$\int \text{arcsen}\frac{x}{a}dx = x\,\text{arcsen}\frac{x}{a} + \sqrt{a^2 - x^2} + c$$

$$\int \arccos\frac{x}{a}dx = x\arccos\frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2} + c$$

$$\int \text{tg}(ax)\,dx = -\frac{1}{a}\ln\left|\cos(ax)\right| + c$$

$$\int \text{cotg}(ax)\,dx = \frac{1}{a}\ln\left|\text{sen}(ax)\right| + c$$

$$\int \text{arctg}\frac{x}{a}dx = x\,\text{arctg}\frac{x}{a} - \frac{a}{2}\ln(a^2 + x^2) + c$$

$$\int \text{arccotg}\frac{x}{a}dx = x\,\text{arccotg}\frac{x}{a} + \frac{a}{2}\ln(a^2 + x^2) + c$$

Teorema della media: Se la funzione $f(x)$ è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a,b]$, allora esiste un punto c di tale intervallo per cui si ha $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

Sono equazioni che stabiliscono un legame fra la variabile x, la funzione $f(x)$ ed alcune derivate della funzione stessa. L'ordine di una equazione differenziale è l'ordine max della derivata.
Le soluzioni delle equazioni differenziali sono funzioni che differiscono tra loro per i valori di una o più costanti. L'insieme di tutte le soluzioni è l'integrale (o soluzione) generale. La soluzione ottenuta dando alle costanti valori determinati si chiama *integrale* (o *soluzione*) *particolare*.
Si chiama invece *integrale singolare* una soluzione dell'equazione che non sia un caso particolare dell'integrale generale.

Alcuni tipi di equazioni differenziali

1) *Equazioni differenziali a variabili separate del 1° ordine.*

Si possono scrivere sotto la forma $M(x) \cdot dx + N(y) \cdot dy = 0$ in cui il coefficiente di dx è funzione della sola x e quello di y è funzione della sola y.

L'integrale generale di tali equazioni è dato da

$$\int M(x)\,dx + \int N(y)\,dy = c$$

Es. $y' = x(1+y^2) \rightarrow \frac{dy}{dx} = x(1+y^2) \rightarrow \frac{dy}{1+y^2} = x\,dx \rightarrow \int \frac{dy}{1+y^2} = \int x\,dx + c \rightarrow$

$\rightarrow \text{arctg}\,y = \frac{x^2}{2} + c \rightarrow y = \text{tg}\left(\frac{x^2}{2} + c\right).$

2) *Equazioni differenziali lineari del 1° ordine.*

Una equazione differenziale si dice lineare quando la y e le sue derivate non figurano con esponente maggiore di uno. Le equazioni lineari di 1° ordine possono scriversi nella forma

$$y' + p(x) \cdot y = q(x)$$

dove $p(x)$ e $q(x)$ sono funzioni note della variabile x, che si suppongono continue.
Se $q(x) = 0$, l'equazione lineare si dice omogenea; in caso contrario si dice non omogenea.
L'equazione lineare omogenea $y' + p(x) \cdot y = 0$ ammette l'integrale generale

$$y = c \cdot e^{-\int p(x)dx}$$

dove c è una costante qualsiasi e l'integrale rappresenta una qualsiasi primitiva di $p(x)$.
L'equazione lineare non omogenea $y' + p(x) \cdot y = q(x)$ ammette l'integrale generale

$$y = e^{-\int p(x)dx} \cdot \left[\int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \cdot dx + c\right]$$

- *Equazione lineare del 1° ordine a coefficienti costanti*: si ha quando $p(x)$ = costante.

  Essa assume la forma $y' + \alpha\, y = 0$, se omogenea (con α costante), ed ammette la soluzione generale

  $y = c\, e^{-\alpha x}$

  L'equazione lineare del 1° ordine a coefficienti costanti $y' + \alpha\, y = q(x)$ ammette, pertanto, la soluzione generale

  $$y = e^{-\alpha x} \cdot \left[\int q(x) \cdot e^{\alpha x} dx + c \right]$$

- *Equazione lineare del 2° ordine omogenee a coefficienti costanti.*

  Assumono la forma $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$ con p e q costanti reali.
  Per trovare l'integrale generale, dobbiamo risolvere l'equazione caratteristica dell'equazione differenziale $\alpha^2 + p\,\alpha + q = 0$, un'equazione algebrica ottenuta sostituendo alla y la variabile α elevata ad un esponente pari all'indice di derivazione.

  Se il $\Delta = p^2 - 4q$ dell'equazione caratteristica è maggiore di zero, l'equazione ammette due radici reali e distinte $\alpha_1 = \frac{-p + \sqrt{\Delta}}{2}$ ed $\alpha_2 = \frac{-p - \sqrt{\Delta}}{2}$ e l'integrale generale dell'equazione differenziale è

  $$y = c_1\, e^{\alpha_1 x} + c_2\, e^{\alpha_2 x}$$

  Se $\Delta = 0$, l'equazione caratteristica ammette due radici reali e coincidenti $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{-p}{2} = \alpha$ e l'integrale dell'equazione differenziale è

  $$y = c_1 \cdot e^{\alpha x} + c_2 \cdot x \cdot e^{\alpha x}$$

  Se $\Delta < 0$, l'equazione caratteristica ammette due soluzioni complesse coniugate

  $$\alpha_1 = \frac{-p + j\sqrt{|\Delta|}}{2} = \alpha + j\beta \quad \text{ed} \quad \alpha_2 = \frac{-p - j\sqrt{|\Delta|}}{2} = \alpha - j\beta$$

  e l'integrale generale dell'equazione differenziale è

  $$y = e^{\alpha x} \cdot (c_1 \cos \beta x + c_2 \operatorname{sen} \beta x)$$

- *Equazioni lineari del 2° ordine a coefficienti costanti non omogenee.*

  Assumono la forma

  $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x)$

  La soluzione generale di essa si ottiene sommando alla soluzione generale dell'equazione $y'' + p\, y' + q\, y = 0$ omogenea associata, una soluzione particolare, qualsiasi, dell'espressione non omogenea. Questa soluzione particolare è strettamente legata alla $f(x)$ ed assume la forma

  $y_p(x) = \gamma_1(x)\, y_1(x) + \gamma_2(x)\, y_2(x)$

  analoga alla soluzione generale dell'equazione omogenea associata, dove, però al posto delle costanti c_1 e c_2 ci sono due funzioni $\gamma_1(x)$ e $\gamma_2(x)$, derivabili, definite per mezzo dei due integrali

  $$\gamma_1(x) = -\int f(x) \frac{y_2(x)}{w(x)} dx \quad \text{e} \quad \gamma_2(x) = \int f(x) \frac{y_1(x)}{w(x)} dx,$$

  in cui $w(x)$ è il determinante wronskiano definito come

  $$w(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x) \cdot y_2'(x) - y_2(x) \cdot y_1'(x)$$

  e $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono due integrali indipendenti dell'equazione omogenea associata.

Se la $f(x)$ assume forme particolari, si può ricavare un integrale particolare senza ricorrere al metodo di Lagrange che obbliga ad eseguire una o più integrazioni non sempre agevoli.

1° caso. Se $f(x)$ è un polinomio di grado n, l'integrale particolare $y_p(x)$ è anch'esso un polinomio di grado n, se $p \neq 0$ e $q \neq 0$; di grado $(n + 1)$, se $q = 0$ e $p \neq 0$ (manca il termine in y) e di grado $(n + 2)$ se $p = 0$ e $q = 0$ (manca sia il termine in y che in y').

$y_p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$

I coefficienti $a_0, a_1 \dots a_n$ si trovano calcolando y'_p e y''_p, sostituendola nella equazione differenziale di partenza e risolvendo il sistema lineare che scaturisce, applicando il principio dell'identità del polinomio.

2° caso. $f(x) = p \cos \beta x + q \operatorname{sen} \beta x$. In tal caso se $j\beta$ non è soluzione dell'equazione caratteristica, l'integrale particolare

$y_p(x) = a \cos \beta x + b \operatorname{sen} \beta x$.

Se invece $j\beta$ è soluzione dell'equazione caratteristica l'integrale particolare è del tipo

$y_p(x) = x\,(a \cos \beta x + b \operatorname{sen} \beta x)$,

dove al solito a e b si determinano, ricavando y'_p ed y''_p, sostituendo nella equazione di partenza ed applicando il principio dell'identità dei polinomi.

La forma dell'integrale y_p è la stessa anche se manca nella $f(x)$ il termine in $\operatorname{sen} \beta x$ o quello in $\cos \beta x$.

Equazione di Bernoulli

È l'equazione differenziale che si presenta nella forma $y' + p(x)\, y = q(x)\, y^n$ dove $p(x)$ e $q(x)$ sono funzioni continue in un certo intervallo $[a, b]$ ed n numero reale.

Si risolve dividendo tutti i termini per y^n [si ha $y' \cdot y^{-n} + p(x) \cdot y^{1-n} = q(x)$] ed introducendo la funzione $z = y^{1-n}$, da cui $z' = (1 - n) \cdot y^{-n} \cdot y'$, che trasforma l'equazione scritta in una equazione lineare

$$\frac{z'}{1-n} + p(x) \cdot z = q(x), \text{ ossia } z' + (1-n) \cdot p(x) \cdot z = (1-n) \cdot q(x).$$

Quest'ultima si risolve con la formula risolutiva delle equazioni lineari. Ad ogni integrale $z(x)$ trovato corrisponde l'integrale $y(x) = [z(x)]^{\frac{1}{1-n}}$ (ottenuta dalla definizione di $z = y^{1-n}$ elevando ambo i membri ad $\frac{1}{1-n}$).

SERIE

1. Serie a termini di segno alterno

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k u_k = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \dots$$

Si dice *a termini di segno alterno*. Una serie di questo tipo è convergente, se la successione u_k è **monotòna** ed **infinitesima**.

2. Convergenza assoluta

Per la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \dots$$

valgono i criteri di seguito elencati.

- Si supponga che

$$\lim_{k\to\infty} |u_k|^{1/k} = q\,;$$

se $q < 1$, la serie è assolutamente convergente, mentre se $q > 1$, essa diverge (*criterio della radice o di Cauchy*).

- Si supponga che

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = q\,;$$

se $q < 1$, la serie è assolutamente convergente, mentre se $q > 1$, la serie diverge (*criterio del rapporto o di d'Alembert*).

- Si supponga che

$$\lim_{k\to\infty} \left\{\left|\frac{u_k}{u_{k+1}}\right| - 1\right\} = q\,;$$

se $q > 1$, la serie è assolutamente convergente, mentre se $q < 1$, essa diverge (*criterio di Raabe*). Per $q = 1$, i criteri sono inefficaci o non applicabili.

3. Serie di Fourier

Sia $f(x)$ una funzione *periodica*, con periodo $2L$, *e continua a tratti* definita nell'intervallo $(-L, L)$. La *serie di Fourier* o *sviluppo di Fourier* associato a $f(x)$ è per definizione

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\right),$$

in cui i *coefficienti di Fourier* a_n e b_n sono

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx\,, \quad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}dx\,.$$

Usando l'identità di Eulero, la serie di Fourier si può anche scrivere nella forma complessa

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(j\frac{n\pi x}{L}\right),$$

i cui coefficienti di sviluppo valgono

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\exp\left(-j\frac{n\pi x}{L}\right)dx\,.$$

4. Serie di Taylor

Nel 1715, Brook Taylor pubblicò lo sviluppo in serie

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\,, \qquad |x-a| < r\,,$$

che consente di rappresentare una qualsiasi funzione $f(x)$, indefinitamente derivabile [$f^{(k)}(a)$ esiste per ogni valore dell'intero k], in una serie di potenze. L'ascissa a è detta *punto iniziale*, mentre r definisce l'intervallo di valori entro cui la serie converge e viene detto *raggio di convergenza*.
Se $a = 0$, la serie viene detta *di Mac Laurin*.
Si può troncare la serie, prendendo soltanto i primi n termini, ed ottenere un polinomio di Taylor, che approssima la funzione in un intorno del punto $x = a$. Questo polinomio approssimante viene, talvolta, efficacemente utilizzato per integrazioni e derivazioni numeriche della funzione.

Esempi di sviluppi in serie di Mac Laurin di funzioni elementari:

- $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, r = ∞;
- $\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$, r = ∞;
- $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$, r = ∞;
- $\frac{x^m}{1-x} = \sum_{k=m}^{\infty} x^k$, r = 1;
- $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$, r = 1;
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \ldots$, r = 1;
- $\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$, r = 1.

DETERMINANTE DI UNA MATRICE QUADRATA

Il determinante di una matrice quadrata A del secondo ordine vale

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}\,.$$

Il determinante di una matrice del terzo ordine si può ricavare, semplicemente, con la regola di Sarrus: basta riscrivere la prima e la seconda colonna e considerare i prodotti delle diagonali, prendendo col segno + quelli segnati in nero e col segno – quelli segnati in blu, secondo lo schema di seguito indicato

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33}.$$

Per trovare il determinante di una matrice di ordine n superiore a 3, conviene usare il Teorema di Laplace. Prima di enunciarlo, è necessario definire il complemento algebrico (o cofattore) di a_{ij}: esso è il determinante della matrice di ordine $(n - 1)$, ottenuta sopprimendo la riga i-esima e la colonna j-esima della matrice in esame, preceduto dal segno $(-1)^{i+j}$. Il cofattore di a_{ij} si indica con α_{ij}.

Teorema di Laplace

Afferma che il determinante di una data matrice è uguale alla somma dei prodotti degli elementi di una linea (riga o colonna), comunque fissata, per i rispettivi complementi algebrici (o cofattori). Scegliendo di sviluppare il determinante secondo la riga i-esima, risulta

$$\det(A) = a_{i1}\,\alpha_{i1} + a_{i2}\,\alpha_{i2} + \ldots + a_{in}\,\alpha_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,\alpha_{ik}\;;$$

se, invece, si utilizza la colonna j-esima, risulta

$$\det(A) = a_{1j}\,\alpha_{1j} + a_{2j}\,\alpha_{2j} + \ldots + a_{nj}\,\alpha_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\,\alpha_{kj} \;.$$

Ad esempio, se per una matrice del terzo ordine si decide di applicare il teorema di Laplace secondo gli elementi della prima riga, si può scrivere

$$\det(A) = a_{11}\,\alpha_{11} + a_{12}\,\alpha_{12} + a_{13}\,\alpha_{13} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$
$$= a_{11}(a_{22}\,a_{33} - a_{32}\,a_{23}) - a_{12}(a_{21}\,a_{33} - a_{31}\,a_{23}) + a_{13}(a_{21}\,a_{32} - a_{31}\,a_{22}) =$$
$$= a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{31}\,a_{23} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - (a_{11}\,a_{32}\,a_{23} + a_{12}\,a_{21}\,a_{33} + a_{13}\,a_{31}\,a_{22}).$$

Usando la seconda colonna si ottiene lo stesso risultato

$$\det(A) = a_{12}\,\alpha_{12} + a_{22}\,\alpha_{22} + a_{32}\,\alpha_{32} = -a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} =$$
$$= -a_{12}(a_{21}\,a_{33} - a_{31}\,a_{23}) + a_{22}(a_{11}\,a_{33} - a_{31}\,a_{13}) - a_{32}(a_{11}\,a_{23} - a_{21}\,a_{13}) =$$
$$= a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{31}\,a_{23} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - (a_{11}\,a_{32}\,a_{23} + a_{12}\,a_{21}\,a_{33} + a_{13}\,a_{31}\,a_{22}).$$

Per calcolare il determinante col teorema di Laplace, conviene evidentemente scegliere la riga o la colonna con il maggior numero di elementi nulli.

GEOMETRIA PIANA

Figura piana	Disegno	Formule
Triangolo		$P = a + b + c$ $S = \dfrac{a \cdot h}{2}$
Triangolo rettangolo		$P = a + b + c$ $S = \dfrac{a \cdot h}{2} = \dfrac{b \cdot c}{2}$ $h = \dfrac{b \cdot c}{a}$
Teorema di Pitagora		$a = \sqrt{b^2 + c^2}$ $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

Teoremi di Euclide	a	$h=\sqrt{m\cdot n}$ $b=\sqrt{a\cdot m}$ $c=\sqrt{a\cdot n}$ $a=m+n$
Rettangolo		$P=2(a+b)$ $S=a\cdot b$ $d=\sqrt{a^2+b^2}$
Quadrato		$P=4l$ $S=l^2$ $d=l\sqrt{2}$
Cerchio		$C=2\pi\cdot r$ $S=\pi r^2$
Corona circolare		$S=\pi\cdot(R^2-r^2)$

Trapezio		$P=l_1+l_2+b_1+b_2$ $S=\frac{(b_1+b_2)\cdot h}{2}$
Parallelogramma	h a	$S=a\cdot h$
Rombo		$P=4l$ $S=l\cdot h=\frac{d_1\cdot d_2}{2}$ $l=\sqrt{\frac{d_1^2}{4}+\frac{d_2^2}{4}}$
Poligono regolare		$S=\frac{P\cdot a}{2}$ $a=l\cdot f$ $f=\frac{1}{2tg\left(\frac{\pi}{N}\right)}$ $S=l^2\cdot\frac{N\cdot f}{2}=\frac{Nl^2}{4\,tg\left(\frac{\pi}{N}\right)}$

P = perimetro;
S = superficie;
l = lato,
a = apotema;
h = altezza;

m = proiezione del cateto b;
n = proiezione del cateto c;
d = diagonale
r = raggio
N = numero lati poligono regolare

Numero di lati	Nome poligono regolare	Numero fisso (f)	$\frac{N \cdot f}{2}$
3	Triangolo equilatero	0.28867	0.43301
4	Quadrato	0.5	1
5	Pentagono	0.68819	1.72048
6	Esagono	0.86602	2.59808
7	Ettagono	1.0383	3.63391
8	Ottagono	1.2071	4.82843
9	Ennagono	1.3737	6.18282
10	Decagono	1.5388	7.69421
11	Undecagono	1.7028	9.36564
12	Dodecagono	1.8660	11.9615
15	Pentadecagono	1.352	17.642

LUNGHEZZA DI UN ARCO DI CURVA

La lunghezza dell'arco di curva, descritto da funzione $y = f(x)$ ed avente per estremi i punti $A[a; f(a)]$ e $B[b; f(b)]$, vale

$$L = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx\,.$$

GEOMETRIA NELLO SPAZIO

P = perimetro
h = altezza
a = apotema
d = diagonale
S_b = area di base
S_l = area della superficie laterale
S_t = area della superficie totale
V = volume

Prisma retto

$$S_l = P \cdot h$$
$$S_t = S_l + 2 \cdot S_b$$
$$V = S_b \cdot h$$

Parallelepipedo rettangolo di dimensioni a, b, c

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$
$$S_l = 2 \cdot (a+b) \cdot c$$
$$S_t = 2 \cdot (ab + bc + ac)$$
$$V = a \cdot b \cdot c$$

Cubo di spigolo a

$$d = a\sqrt{3}$$
$$S_l = 4 \cdot a^2$$
$$S_t = 6 \cdot a^2$$
$$V = a^3$$

Piramide retta

$$S_l = \frac{P}{2} \cdot a_p$$
$$S_t = S_l + S_b$$
$$V = \frac{1}{3} \cdot S_b \cdot h$$

Tronco di piramide retta
Con basi rispettivamente di semiperimetri p e p' e aree S_b e S'_b

$$S_l = \frac{P + P'}{2} \cdot a_p$$
$$S_t = S_l + S_b + S'_b$$
$$V = \frac{1}{3} \cdot (S_b + S'_b + \sqrt{S_b + S'_b}) \cdot h$$

Cilindro circolare retto

$S_l = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$

$S_t = S_l + 2 \cdot S_b = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h + 2 \cdot \pi \cdot r^2$

$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$

Cono circolare retto

$S_l = \pi \cdot r \cdot a_p$

$S_t = S_l + S_b = \pi \cdot r \cdot a_p + \pi \cdot r^2$

$V = \frac{1}{3} \cdot S_b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

Tronco di cono circolare retto

$S_l = \pi \cdot (r + r') \cdot a_p$

$S_t = S_l + S_b + S'_b = \pi \cdot (r + r') \cdot a_p + \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r'^2$

$V = \frac{1}{3} \cdot (S_b + S'_b + \sqrt{S_b \cdot S'_b}) \cdot h = \frac{\pi}{3} \cdot (r^2 + r'^2 + r \cdot r') \cdot h$

Sfera

$S_t = 4 \cdot \pi \cdot r^2$

$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

Calotta sferica

$S = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$

Segmento sferico a una base

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h^2 (3r - h)$

Zona sferica

$S = 2\pi r h$

Segmento sferico a due basi

$V = \frac{1}{6} \pi h^3 + \frac{1}{2} \pi h (r_1^2 + r_2^2)$

Settore sferico

$V = \frac{2}{3} \pi r^2 h$

Fuso sferico

α = misura in radianti dell'angolo $A\hat{O}B$

α^0 = misura in gradi dell'angolo $A\hat{O}B$

$S = 2\alpha r^2 = \frac{\alpha°}{90°} \pi r^2$

Spicchio sferico

$V = \frac{2}{3} \alpha r^3 = \frac{\alpha°}{270°} \pi r^3$

Solidi platonici

a = spigolo R = raggio della sfera circoscritta ρ = raggio della sfera inscritta

Tetraedro

$h = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot a$ $R = \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot a$

$\rho = \frac{\sqrt{6}}{12} \cdot a$ $S_t = \sqrt{3} \cdot a^2$

$V = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot a^3$

Dodecaedro

$R = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (1 + \sqrt{5}) \cdot a$

$\rho = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{10 + \frac{22}{5}\sqrt{5}} \cdot a$

$S_t = 3\sqrt{5 \cdot (5 + 2\sqrt{5})} \cdot a^2$

$V = \frac{1}{4} \cdot (15 + 7\sqrt{5}) \cdot a^3$

Cubo	**Icosaedro**
$d = a\sqrt{3}$ $R = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ $R = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ $S_t = 4 \cdot a^2$ $S_t = 6 \cdot a^2$ $V = a^3$	$R = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{2(5+\sqrt{5})} \cdot a$ $\rho = \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot (3+\sqrt{5}) \cdot a$ $S_t = 5\sqrt{3} \cdot a^2$ $V = \frac{5}{12} \cdot (3+\sqrt{5}) \cdot a^3$
Ottaedro	**Toro**
$R = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a$ $\rho = \frac{\sqrt{6}}{6} \cdot a$ $S_t = 2\sqrt{3} \cdot a^2$ $V = \frac{\sqrt{2}}{3} a^3$	$S = 4\pi^2 R r$ $V = 2\pi^2 R r^2$ R = distanza del centro della circonferenza generatrice dall'asse di rotazione r = raggio della circonferenza generatrice

VOLUME DI UN SOLIDO DI ROTAZIONE

Volume del solido ottenuto dalla rotazione completa attorno all'asse x [ovvero all'asse y] della parte di piano individuata in $[a,b]$ dal grafico della funzione $y = f(x)$ [ovvero $x = g(y)$]

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx \left[= \pi \int_a^b g^2(y)dy \right].$$

Costanti fondamentali

π = 3.14159 26535 89793	2π = 6.28318 53071 79586
$\pi/2$ = 1.57079 63267 94897	$1/\pi$ = 0.31830 98861 83790
π^2 = 9.86960 44010 89358	$\sqrt{\pi}$ = 1.77245 38509 05516
$1/\sqrt{\pi}$ = 0.56418 95835 47756	$\log_e \pi$ = 1.14472 98858 49400
e = 2.71828 18284 59045	$\log_e 2$ = 0.69314 71805 59945
$1/e$ = 0.36787 94411 71442	$\log_{10} 3$ = 0.47712 12547 19662
$\sqrt{2}$ = 1.41421 35623 73095	$\log_{10} e$ = 0.43429 44819 03251
$\sqrt[3]{2}$ = 1.25992 10498 94873	$\log_e 10$ = 2.30258 50929 94045
e^2 = 7.38905 60989 30650	$\sqrt{10}$ = 3.16227 76601 68379
$\sqrt{3}$ = 1.73205 08075 68877	$\sqrt[3]{3}$ = 1.44224 95703 07408
γ_e = 0.57721 56649 01532 (*costante di Eulero-Mascheroni*)	
1 radiante = 1 rad = 57° 17' 44.8'' = 57.295°	1° = 0.01745 32925 19943 29 rad
1' = 0.00029 08882 08665 72160 rad	1'' = 0.00000 48481 36811 0953 rad
rapporto aureo = $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ = 1.61803 39887 49	

Crivello di Eratostene

Il crivello è una sorta di setaccio che, scartando i numeri composti, consente di determinare i numeri primi. Supponendo di voler determinare tutti i numeri primi minori di N si procede nel seguente modo: si scrivono i numeri fino a N in ordine crescente e si eliminano – dopo 2 – tutti i numeri pari, dato che sono multipli di 2. A partire da 3, si eliminano successivamente tutti i multipli di 3, vale a dire un numero ogni tre. Dopo 3 si incontra 5 e si eliminano quindi tutti i multipli di 5, cioè un numero ogni 5, e così via fino a quando non sono stati eliminati tutti i numeri composti. Se, ad esempio, $N = 100$, disponendo i numeri in una tabella si ottengono agevolmente i 25 numeri primi minori di 100.

In realtà quest'operazione termina con l'eliminazione dei multipli di 7 e, dunque, per determinare i primi inferiori a N basta far passare dal setaccio i multipli dei numeri primi minori di $\sqrt{N}$. Apparentemente questa tecnica può sembrare banale, ma qualche volta è l'unico metodo per trovare un primo. Naturalmente, i setacci impiegati sono molto più sofisticati di questo.